Chapitre 4

La transformation de Fourier

Notation : Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on note par $x.y$ leur produit scalaire i.e. $x.y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ avec $i^2 = -1$.

4.0.5 Remarque
Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire alors $(Ax).y = x.({}^tAy)$.

4.1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a $|f(x)e^{-2i\pi xy}| = |f(x)|$, d'où $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-2i\pi xy}|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx = \|f\|_1 < +\infty$, on peut donc définir :

4.1.1 Définition

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle **transformée de Fourier**, la fonction $\widehat{f}$ définie par
$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2i\pi x.y}\,dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$
où $x.y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$.
2. La **transformation de Fourier** sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ est l'application
$$\begin{array}{rcl} \widehat{\ }: L^1(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}^n} \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$$

4.1.2 Remarque

1. On a $\overline{\widehat{f}}(y) = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f}(x)e^{2i\pi xy}\,dx = \widehat{\overline{f}}(-y)$.
2. On utilise aussi la notation $\mathscr{F}(f)$ pour désigner $\widehat{f}$.

Dans la partie qui va suivre on va énoncer les propriétés de base de la transformation de Fourier.

4.1.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Les fonctions considérées seront dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\boxed{P_1}$ $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Démonstration: En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\|\widehat{f}(y)\| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-2i\pi xy}|\, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$. ∎

$\boxed{P_2}$ L'application $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est continue.

Démonstration: Soit (y_k) une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{k\to+\infty} y_k = y$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\lim_{k\to+\infty} f(x)e^{-2i\pi xy_k} = f(x)e^{-2i\pi xy}$, et comme $|f(x)e^{-2i\pi xy_k}| = |f(x)|$ est intégrable et ne dépend pas de k , d'après le théorème de convergence dominée $\lim_{k\to+\infty} y_k\widehat{f}(y_k) = \widehat{f}(y)$. ∎

$\boxed{P_3}$ $\widehat{f(0)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$.

$\boxed{P_4}$ Si $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$, alors $\widehat{f}(y) = \widehat{f_1}(y_1) \dots \widehat{f_n}(y_n)$.

Démonstration: Ceci est une conséquence du théorème de Fubini et la propriété de l'exponentielle :
$$e^{-2i\pi xy} = e^{-2i\pi x_1 y_1} \dots e^{-2i\pi x_n y_n}.$$

$\boxed{P_5}$ Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Démonstration: D'après l'inégalité de Young, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, d'où $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$ fixé, on a $\widehat{f * g}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)e^{-2i\pi xy}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)g(z)e^{-2i\pi xy}\, dz\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{-2i\pi xz} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)e^{-2i\pi(x-z)y}\, dx\right) dz = \widehat{f}(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{-2i\pi xz})\, dz = \widehat{f}(y)\,\widehat{g}(y)$. ∎

4.1.7 Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur translation τ_a par :
$$\tau_a f(x) = f(x-a).$$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On définit l'opérateur dilatation σ_λ par
$$\sigma_\lambda f(x) = f(\frac{x}{\lambda}).$$

$\boxed{P_6}$ (a) $\widehat{\tau_a f}(y) = e^{-2i\pi ay}\widehat{f}(y)$.

(b) $\widehat{\sigma_\lambda f}(y) = |\lambda|^n \widehat{f}(\lambda y)$.

(c) Plus généralement, soit A une matrice inversible et $A = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'isomorphisme linéaire (associé à A) alors :

$$\widehat{f \circ A}(y) = \frac{1}{|\det(A)|} \widehat{f}({}^tA^{-1})(y).$$

Démonstration: $\widehat{f \circ A}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) e^{-2i\pi xy}\, dx$, avec le changement de variable $z = Ax$ on a $\widehat{f \circ A}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2i\pi A^{-1}zy} |\det(A^{-1})|\, dx$. Finalement, comme $(A^{-1}z).y = z.({}^tA^{-1}y)$, on obtient

$$\widehat{f \circ A}(y) = |\det(A^{-1})| \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2i\pi z.({}^tA^{-1}y)}\, dx = \frac{1}{|\det(A)|} \widehat{f}({}^tA^{-1})(y).$$

4.1.9 Remarque

Si A est une matrice orthogonale, i.e. ${}^tA.A = I$ alors ${}^tA^{-1} = A$ et $|\det(A)| = 1$ la formule précédente nous donne alors : $\widehat{f \circ A} = \widehat{f} \circ A$.

En particulier, si f est radiale i.e. f ne dépend que de $\|x\|$, alors $\widehat{f}$ est aussi radiale.

En effet, f est radiale $\Leftrightarrow f \circ A = f$ pour toute matrice A orthogonale.

$\boxed{P_7}$ [Lemme de Riemann-Lebesgue] Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\lim_{\|y\| \to +\infty} \widehat{f}(y) = 0$.

Démonstration: D'après la propriété $\boxed{P_6}$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x+z) e^{-2i\pi xy}\, dx = \widehat{\tau_{-z} f}(y) = e^{2i\pi zy} \widehat{f}(y)$. Si on pose $z = \frac{y}{2\|y\|^2}$, alors $e^{2i\pi zy} = e^{i\pi} = -1$ et $\|z\| = \frac{1}{2\|y\|}$. D'où, $2\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x+z))\, e^{-2i\pi xy}\, dx$. Ainsi, $2|\widehat{f}(y)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+z)|\, dx = \|f - \tau_{-z} f\|_1$.

D'après 3.2.10, $\lim\limits_{\|y\| \to +\infty} |\widehat{f}(y)| \le \dfrac{1}{2} \lim\limits_{z \to 0} \|f - \tau_{-z} f\|_1 = 0$. ∎

Transformation de Fourier et différentiabilité

$\boxed{P_8}$ (a) Si $\|x\|^k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\widehat{f} \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{f} = (2i\pi)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \le k$.

(b) Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \le k$ on ait $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\widehat{D^\alpha f} = (2i\pi)^{|\alpha|} y^\alpha \widehat{f}$$

Démonstration: On va démontrer le résultat pour $k = 1$, i.e ; pour les dérivées partielles d'ordre 1, le cas général se fait par récurrence.
(a) On pose $g(x,y) = f(x)e^{-2i\pi xy}$, alors $\dfrac{\partial g}{\partial y_j} = -2i\pi x_j f(x)e^{-2i\pi xy}$ et $|\dfrac{\partial g}{\partial y_j}| \leq 2\pi\|x\||f(x)|$ qui ne dépend pas de y et qui est dans L^1 par hypothèse.
D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$,

$$-\frac{\partial \widehat{f}}{\partial y_j}(y) = -\frac{\partial}{\partial y_j}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(f(x)e^{-2i\pi xy}\right)dx = 2i\pi\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx.$$

(b) Par le théorème de Fubini on se ramène au cas $n = 1$. Alors, comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ et f sont dans L^1, le théorème d'intégration par parties donne :

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x}(x)\,dx = \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}}[f(x)]_A^B - \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existent et comme $f \in L^1$ ces limites sont nécessairement égales à 0.
D'où

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(y) = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x}(x)e^{-2i\pi xy}\,dx = \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}}\left[f(x)e^{-2i\pi xy}\right]_A^B + 2i\pi y\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx = 2i\pi y\widehat{f}(y).$$

$\boxed{P_9}$ (Formule de transfert) Si f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx$$

Démonstration: Comme f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f}$ et $\widehat{g} \in C_0 \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, d'où $\widehat{f}g$ et $f\widehat{g} \in L^1$. Ainsi les deux intégrales sont bien définies.
Par le théorème de Fubini on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2i\pi zx}\,dz\right)g(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2i\pi zx}\,dx\right)dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\widehat{g}(z)\,dz.$$

4.1.13 EXEMPLE. (i) soit $a > 0$ et $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$ Alors, si $y \neq 0$, $\widehat{f}(y) = \int_{-a}^{a} e^{-2i\pi xy}\,dx = 2\int_0^a \cos(2\pi xy)\,dx = 2\dfrac{\sin(2\pi ay)}{2\pi y}$ et $\widehat{f}(0) = \int_{-a}^{a} dx = 2a$.
(ii) $g(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. Alors $\widehat{f}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-2i\pi xy}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+2i\pi y)}\,dx = \frac{1}{1+2i\pi y}$.
(iii) $h(x) = xe^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. Alors $h(x) = xg(x)$, d'où

$$\widehat{h}(y) = \widehat{xg}(y) = \frac{-1}{2i\pi}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial y}(y) = \frac{-1}{2i\pi}\frac{-2i\pi}{(1+2i\pi y)^2} = \frac{1}{(1+2i\pi y)^2}.$$

4.1.14 EXEMPLE (EXEMPLE FONDAMENTAL). $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2} = e^{-\pi\sum_{k=1}^n x_k^2}$, alors $\widehat{f} = f$. Cet exemple est très important, et la formule pour $\widehat{f}$ peut être calculée de plusieurs manière en voici une, utilisant la propriété $\boxed{P_8}$.

(i) Cas $n = 1$

On a $f'(x) = -2\pi x f(x)$, d'où $\widehat{f'} = 2\pi\widehat{xf}$ ce qui donne $2i\pi y\widehat{f} = -i\widehat{f}'$. Ainsi $\widehat{f}$ est solution de l'équation différentielle, $-2\pi y\widehat{f} = i\widehat{f}'$ i.e. $\widehat{f}(y) = ce^{-\pi y^2}$, et $c = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$. Finalement, $\widehat{f}(y) = e^{-\pi y^2}$.

(ii) Le cas n quelconque, s'obtient en utilisant la propriété $\boxed{P_4}$.

Comme, $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2} = e^{-\pi x_1^2}\dots e^{-\pi x_n^2}$, alors

$$\widehat{f}(y) = \widehat{f}_1(y_1)\dots\widehat{f}_n(y_n) = e^{-\pi y_1^2}\dots e^{-\pi y_n^2} = e^{-\pi\|y\|^2}.$$

4.1.2 Le théorème d'inversion

On peut résumer les propriétés $\boxed{P_1}$, $\boxed{P_2}$ et $\boxed{P_8}$ par

4.1.15 PROPOSITION

La transformation de Fourier $\widehat{\ }: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire continue de norme 1 de $L^1(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|.\|_1$ dans $C_0(\mathbb{R}^n)$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$.

On peut se poser les questions suivantes, l'opérateur précédent est-il injectif ? surjectif ?

Le théorème suivant donne une réponse positive à la première question.

On montre (voir le TD) qu'il existe des fonctions dans $C_0(\mathbb{R}^n)$ qui ne sont pas les transformées de Fourier d'aucune fonction intégrable i.e. l'opérateur n'est pas surjectif.

4.1.16 THÉORÈME (THÉORÈME D'INVERSION)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ p.p.

Démonstration: Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$. Alors $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\,dx = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t\to 0^+}\sigma_{\frac{1}{t}}\phi(x) = \lim_{t\to 0^+}\phi(tx) = 1$.

Par définition $\widehat{\widehat{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{-2i\pi xy}\,dy$

Comme $|\widehat{f}(y)e^{-2i\pi xy}\phi(ty) \le |\widehat{f}(y)|$ qui est par hypothèse dans L^1, d'après le le théorème de convergence dominée on a $\widehat{\widehat{f}}(x) = \lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{-2i\pi xy}\phi(ty)\,dy$.

D'autre part, en utilisant le lemme de transfert, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{-2i\pi xy}\phi(ty)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\tau_x(f)}(y)\phi(ty)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\tau_x(f)(y)\widehat{\sigma_{\frac{1}{t}}\phi}(y)\,dy$$

$$= t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\tau_x(f)(y)\phi(\frac{y}{t})\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}f(z-x)\phi_t(z)\,dz = f*\phi_t(-x).$$

Comme $\phi_t(z) = t^{-n}\phi(\frac{y}{t})$ est une approximation de l'identité (voir 3.2.17), $\lim_{t\to 0^+} f * \phi_t(-x) = f(-x)$ dans L^1. D'après 3.0.21, il existe une sous-suite $\{f * \phi_{t_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout i.e. $\lim_{k\to+\infty} f * \phi_{t_k}(-x) = f(-x)$ p.p.
Finalement,

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)e^{-2i\pi xy}\phi(t_k y)\,dy = \lim_{k\to+\infty} f * \phi_{t_k}(-x) = f(-x) \text{ p.p.}$$

4.1.18 COROLLAIRE (THÉORÈME D'UNICITÉ)
La transformation de Fourier est injective i.e. si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tels que $\widehat{f} = \widehat{g}$, alors $f(x) = g(x)$ p.p.

Démonstration: La transformation de Fourier étant linéaire, il suffit de montrer que $\widehat{f} = 0 \implies f = 0$. Comme $\widehat{f} = 0 \in L^1$, le théorème d'inversion s'applique et donne $f = 0$ p.p. ■

4.1.20 COROLLAIRE
La transformation de Fourier $\widehat{\ }: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ est un monomorphisme d'algèbre de Banach, où $L^1(\mathbb{R}^n)$ est muni de la norme $\|.\|_1$ et du produit de convolution, alors que $C_0(\mathbb{R}^n)$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$ et de la multiplication ordinaire.

4.1.21 COROLLAIRE (L'IDENTITÉ DE PARSEVAL)
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

4.1.22 EXEMPLE. Si $f(x) = e^{-|x|}$, alors $\widehat{f}(y) = \frac{2}{(1+4\pi^2 y)^2}$. Comme $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème d'inversion pour obtenir,
$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car, f est continue). En utilisant la parité de f, on obtient l'identité : $\int_0^{+\infty} \frac{cos(2\pi xy)}{1+4\pi^2 y^2}\,dy = \frac{e^{-|x|}}{4}$.

4.1.23 Exercice Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$, et g la fonction caracteristique d'un intervalle non vide et borné $]a, b[$. Montrer que la fonction $h = fg$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ mais que sa transformée de Fourier $\widehat{h}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Solution: Soit $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. On notera que M existe et est fini, puisque $f \in C(\mathbb{R})$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |h| = \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a) < \infty.$$

D'où, $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Réciproquement, on choisit $(a,b) = (0,1)$, et soit $g = \chi_{(0,1)}$ et $f(x) = \sqrt{2\pi}$, la fonction constante. Alors,

$$\widehat{h}(t) = \int_0^1 e^{-ixt}\, dx = -it\left[e^{-it} - 1\right].$$

d'où,

$$\left|\widehat{h}(t)\right| = |t| \left|1 - e^{-it}\right| = |t||1 + \sin t - \cos t|.$$

Clairement, en intégrant $\left|\widehat{h}\right|$ sur $\mathbb{R}$ donne ∞. Ainsi, $\widehat{h} \notin L^1(\mathbb{R})$. ■

4.2 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

4.2.1 L'espace de Schwartz

4.2.1 DÉFINITION

1. Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à dite **à décroissance rapide** si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on ait $\|x\|^k |f(x)| \leq C_k$.
2. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de toutes les fonctions à décroissances rapides ainsi que toutes leurs dérivées partielles i.e.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < +\infty \right\}.$$

4.2.2 REMARQUE

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|x\|^k f(x) = 0$.
En effet,

$$(1 + \|x\|^2)^k = (1 + |x_1|^2 + \ldots |x_n|)^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha!(k-|\alpha|)!} |x_1|^{2\alpha_1} \ldots |x_n|^{2\alpha_n} = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha!(k-|\alpha|)!} |x^{2\alpha}|.$$

Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^k |f(x)| \leq \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha!(k-|\alpha|)!} (\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{2\alpha}||f(x)|) < +\infty.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(1 + \|x\|^2)\|x\|^k |f(x)| \leq (1 + \|x\|^2)^{k+1} |f(x)| < +\infty$, il existe $C \geq 0$ tel que
$\|x\|^k |f(x)| \leq \frac{C}{1+\|x\|^2}$ donc tend vers 0 lorsque $\|x\| \to +\infty$.

2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la fonction produit $P.f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
   En effet, $P.f$ est de classe C^∞, et $x^\beta D^\alpha(Pf)$ est une combinaison linéaire finie de de terme de la forme $x^{\beta'} D^{\alpha'} f(x)$, est donc bornée, puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
3. On a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
   Ainsi, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1, +\infty[$.
   Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x^\beta D^\alpha f(x)$ est a support compact, donc bornée.
   Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors f est bornée, d'où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d'après 1), il existe $C > 0$ telle que $(1 + \|x\|^2)^n |f(x)|$, d'où
   $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{np}} \, dx < +\infty$ car $2np > n$.
   Ainsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

4.2.3 EXEMPLE. $e^{-a\|x\|^2}$ avec $a > 0$, $e^{-\|x\|^{2k}}$ avec $k \in \mathbb{N}$, $x_1^5 e^{x_2^4 \|x\|^2}$ et $\frac{1}{\cos h(x_1)}$ sont des éléments de $\mathcal{S}$.

Par contre, $e^{-\|x\|}$, $e^{-\|x\|^3}$, $\sin(x_1)$ et toute fonction polynomiale non identiquement nulle, ne sont pas des éléments de $\mathcal{S}$.

4.2.4 PROPOSITION
Si $f \in \mathcal{S}$ on a pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $D^\gamma f$ et $x^\gamma f$ sont dans $\mathcal{S}$.

Démonstration: En effet, d'après la formule Leibnitz $x^\beta D^\alpha (x^\gamma f)(x)$ est une combinaison linéaire finie de termes de la forme $x^{\beta'} D^{\alpha'} f(x)$ est donc bornée sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, par suite $x^\gamma f \in \mathcal{S}$. ■

4.2.6 THÉORÈME
La transformation de Fourier est un isomorphisme linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même.

Démonstration: Comme $\mathcal{S} \subset L^1$, $\widehat{f}$ est définie pour tout $f \in \mathcal{S}$. On pose $\widehat{\mathcal{S}} = \{\widehat{f} \mid f \in \mathcal{S}\}$.

Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrons que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ fixés, $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |y^\beta D^\alpha \widehat{f}(y)| < +\infty$.

D'après la propriété $\boxed{P_8}$, $D^\alpha \widehat{f}(y) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(y)$ d'où
$y^\beta D^\alpha \widehat{f}(y) = \frac{1}{(2i\pi)^\beta} (2i\pi y)^\beta (-2i\pi)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(y) = (-1)^{|\alpha|} (2i\pi)^{|\alpha| - |\beta|} \widehat{D^\beta (x^\alpha f)}(y)$. Comme $f \in \mathcal{S}$, $D^\beta(x^\alpha f) \in \mathcal{S}$, de sorte que $D^\beta(x^\alpha f) \in L^1$, et donc $\widehat{D^\beta(x^\alpha f)} \in L^\infty$, ainsi $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. On a donc $\widehat{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$ par suite $\widehat{\ }: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Comme $\widehat{\ }: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier, de sorte que pour tout $f \in \mathcal{S}$ on a $\widehat{\widehat{f}}(-x) = f(x)$, d'où la surjectivité de $\widehat{\ }$; l'injectivité est vérifiée, car $\mathcal{S} \subset L^1$. Par suite la transformation de Fourier de $\mathcal{S}$ sur lui-même est bijective. ■

4.2.8 COROLLAIRE
si $f, g \in \mathcal{S}$ alors :

1) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$
2) $\widehat{f} * \widehat{g} = \widehat{fg}$

Démonstration: 1. On l'a déjà montrer, propriété $\boxed{P_5}$, pour L^1 elle est donc valable en particulier pour $\mathcal{S}$.

2. Par la bijectivité de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$, il existe $u, v \in \mathcal{S}$ tels que $f = \widehat{u}$ et $g = \widehat{v}$ alors, $\widehat{fg}(x) = \widehat{\widehat{u}\widehat{v}}(x) = \widehat{\widehat{u * v}}(x) = u * v(-x)$ d'où $\widehat{fg}(x) = \widehat{f} * \widehat{g}$. ∎

4.2.10 COROLLAIRE (L'IDENTITÉ DE PARSEVAL)

1. Pour tout $f \in \mathcal{S}$ on a $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$
2. Pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$.

Démonstration: 1. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $= \widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$ en particulier pour $y = 0$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx = \widehat{fg}(0) = \widehat{f} * \widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(z)\widehat{g}(-z)\, dz.$$

Si on pose $g = \overline{f}$, alors $\widehat{g}(-z) = \widehat{\overline{f}}(-z) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f}(x)e^{2i\pi xz}\, dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2i\pi xz}\, dx} = \overline{\widehat{f}}(z)$. On obtient finalement,

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{f}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(z)\overline{\widehat{f}}(z)\, dz = \|\widehat{f}\|_2^2.$$

2. On utilise l'identité de polarisation. ∎

4.2.2 Transformation de Fourier sur L^2

On va maintenant étendre la transformation de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$. On remarquera qu'on ne peut pas étendre directement la formule de la transformation de Fourier, à $L^2(\mathbb{R})$, en effet si $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{2i\pi xy}\, dx$ diverge pour tout $y \in \mathbb{R}^n$; donc $\widehat{f}$ n'a pas de sens en général pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour surmonter cette difficulté, on va utiliser la densité de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et le théorème de prolongement des application uniformément continues (voir Annexe), pour étendre de façon unique la transformation unitaire $\widehat{\ }: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en une transformation unitaire $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, appelée transformation de Fourier-Plancherel.

4.2.12 THÉORÈME (FOURIER-PLANCHEREL)
Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on associe une fonction $\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que :

1. $\mathscr{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \widehat{\ }|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$
2. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{F}(\mathscr{F}(f))(x) = f(-x)$ p.p.
3. (l'identité de Parseval) Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\mathscr{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$, et pour f, g éléments de $L^2(\mathbb{R}^n)$ on a :
$$\langle \mathscr{F}(f), \mathscr{F}(g) \rangle = \langle f, g \rangle$$
4. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$ i.e. les transformations de Fourier et de Fourier-Plancherel coïncident dans $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.
5. L'application $f \mapsto \mathscr{F}(f)$ est une application unitaire de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même.
6. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on pose
$$\varphi_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{\|x\| \leq n\}} f(x) e^{-2i\pi xy}\, dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$
et
$$\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{\|x\| \leq n\}} \mathscr{F}(f)(t) e^{2i\pi xt}\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
alors $\|\varphi_n - \mathscr{F}(f)\|_2 \to 0$ et $\|\psi_n - f\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$,

---

Démonstration: 1. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\widehat{\ } : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une application unitaire d'après le théorème de prolongement, il existe une et une seule application linéaire continue $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, telle que $\lim_{k\to+\infty} \|f_k - f\|_2 = 0$. Alors $\mathscr{F}(f) = \lim_{k\to+\infty} \widehat{f_k}$.

2. Alors $\mathscr{F}(\mathscr{F}(f))(x) = \mathscr{F}(\mathscr{F}(\lim_{k\to+\infty} f_k))(x) = \lim_{k\to+\infty} \widehat{\widehat{f_k}}(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(-x) = f(-x)$.
3. Comme $\mathscr{F}$ et $\|.\|_2$ sont continues on a
$$\|\mathscr{F}(f)\|_2 = \|\lim_{k\to+\infty} \widehat{f_k}\|_2 = \lim_{k\to+\infty} \|\widehat{f_k}\|_2 = \lim_{k\to+\infty} \|f_k\|_2 = \|\lim_{k\to+\infty} f_k\|_2 = \|f\|_2,$$
d'où l'identité de Parseval.
4. Soit $\phi_n \in C_c^\infty$, telle que $0 \leq \phi_n \leq 1$ et $\phi_n \equiv 1$ dans $B(0, n)$.
Alors pour tout $g \in \mathcal{S}$ on a $\langle \widehat{f}\phi_n, g \rangle = \langle \widehat{f}, \phi_n g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\, \overline{\phi_n g} = \int_{\mathbb{R}^n} f\, \widehat{\overline{\phi_n g}} = \int_{\mathbb{R}^n} f\, \mathscr{F}(\overline{\phi_n g}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(f) \overline{\phi_n g} = \langle \mathscr{F}(f), \phi_n g \rangle = \langle, \mathscr{F} f()\phi_n, g \rangle$.
D'où $\langle (\mathscr{F} f - \widehat{f})\phi_n, g \rangle = 0$ pour tout $g \in \mathcal{S}$ i.e. $(\mathscr{F} f - \widehat{f})\phi_n \in \mathcal{S}^\perp$. Comme $\mathcal{S}$ est dense dans L^2, $(\mathscr{F} f - \widehat{f})\phi_n = 0$ ce qui entraîne que $\mathscr{F} f = \widehat{f}$ sur $B(0, n)$ pour tout n, i.e. $\mathscr{F} f = \widehat{f}$. ■

4.2.14 REMARQUE
On voit que l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ se comporte mieux par rapport à la transformation de Fourier, puisque c'est une application unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même, alors que pour $L^1(\mathbb{R}^n)$ il n'est pas facile de caractériser l'image de la transformation de Fourier.

Cependant, l'expression de la transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ est moins simple pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, que pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, puisqu'elle se calcule par passage à la limite.

4.2.15 EXEMPLE. Soit $f = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f}(y) = \frac{1}{1+2i\pi y} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$. Alors la transformation de Fourier-Plancherel nous donne : $\mathscr{F}(\mathscr{F}(f))(x) = f(-x)$ i.e.

$$\mathscr{F}(\widehat{f})(x) = \mathscr{F}\left(\frac{1}{1+2i\pi y}\right)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

4.2.16 Exercice Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Solution: Comme f et $\widehat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, on peut appliquer le théorème d'inversion pour obtenir une fonction $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ qui coïncide avec f presque partout. D'où, sans perte de généralité, il suffit de montrer que $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Comme $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, il existe une boule fermée $B_F(0,r)$, telle que en dehors de cette boule $|g(x)| < 1$. De plus, $|g|$ atteint son maximum M dans $B_F(0,r)$, ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\,dx &= \int_{B_F(0,r)} |g(x)|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_F(0,r)} |g(x)|^2\,dx \\ &\leq \int_{B_F(0,r)} M^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus B_F(0,r)} |g(x)|\,dx \\ &\leq M^2 \mu(B_F(0,r)) + \|f\|_1 < \infty. \end{aligned}$$ ■

On notera que par l'identité de Parseval, on a aussi

$$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

4.2.3 Annexe

4.2.18 THÉORÈME (LE THÉORÈME DE PROLONGEMENT)
Soit (E, d_E) un espace métrique, $D \subset E$ une partie dense et (F, d_F) un espace métrique complet.

Soit $f : A \to F$ une application uniformément continue.

Alors, il existe une unique application uniformément continue $\tilde{f} : E \to F$ telle que $\tilde{f}|_D = f$.

En particulier

4.2.19 COROLLAIRE

$(E, \|.\|_E)$ est un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel dense de E et $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach. Alors pour toute application linéaire continue $f : D \to F$, il existe une unique application linéaire continue $\tilde{f} : E \to F$ telle que, $\tilde{f}|_D = f$.

Démonstration: Comme f est linéaire continue, pour tout $x, x' \in E$, $\|f(x) - f(x')\|_F \leq \|f\|.\|x - x'\|_E$, elle est en particulier uniformément continue, d'après le théorème de prolongement, il existe une unique application uniformément continue $\tilde{f} : E \to F$ telle que $\tilde{f}|_D = f$.

Soit $x, x' \in E$ α et $\beta \in \mathbb{C}$. Par densité, il existe $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ dans D telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} x'_n = x'$. Alors, par continuité on a $\tilde{f}(\alpha x + \beta x') = \tilde{f}\left(\lim_{n\to+\infty}(\alpha x_n + \beta x'_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{f}(\alpha x_n + \beta x'_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left((\alpha x_n + \beta x'_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \alpha f(x_n) + \beta f(x'_n) = \alpha\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(x')$. D'où $\tilde{f}$ est linéaire.